Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.5 (1995-1996), 65-70

Dedicat Centenarului Gazetei Matematice (1895-1995)

OBSERVAŢII METODICE PRIVIND GRAFICELE UNOR FUNCŢII RAŢIONALE ŞI LEGĂTURA CU REZOLVAREA ECUAŢIEI DE GRADUL AL TREILEA

Iulian COROIAN

§1. Introducere

Prezentul articol îşi propune să vină în sprijinul efectiv al profesorilor de matematică la clasă, şi anume la consolidarea deprinderilor de a reprezenta grafic funcţiile raţionale de forma

(1.1) $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$, $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a,b,c,m,n,p\in\mathbb{R}$

cu $m\neq 0$. Vom evidenţia în mod special studiul rădăcinilor reale şi semnul lui $f'(x)$ şi $f''(x)$ atât de important în determinarea extremelor locale, a punctelor de inflexiune, a intervalelor de convexitate şi concavitate ale funcţiei f (respectiv ale graficului funcţiei f).

Acest studiu se poate face pe baza unei observații simple legată de expresiile lui $f'(x)$ și $f''(x)$.

Tot pe baza aceleiaș observații, se va prezenta o metodă de rezolvare a ecuației de gradul al treilea, echivalentă cu formula lui Cardan [1,pag.240].

§2. Observație importantă privind f' și f''

Calculând derivatele $f'(x)$ și $f''(x)$ se obțin expresiile

(2.1) $$f'(x)=\frac{(an-bm)x^2+2(ap-cm)x+(bp-cn)}{(mx^2+nx+p)^2},$$

(2.2) $$f''(x)=-2\frac{m(an-bm)x^3+3m(ap-cm)x^2+3m(bp-cn)x-(ap^2-bpn-cpm+cn^2)}{(mx^2+nx+p)^3}.$$

Studiul rădăcinilor reale ale ecuației $f''(x)=0$ ne pune în situația, în ipoteza că $an\neq bm$, de a aplica metoda șirului lui Rolle ecuației algebrice de gradul al treilea

(2.3) $$g(x)=0,$$

unde g este polinomul de la numărătorul lui $f''(x)$. Astfel trebuie rezolvată în $\mathbb{R}$ ecuația

(2.4) $$g'(x)=-6m[(an-bm)x^2+2(ap-cm)x+(bp-cn)]=0.$$

Observația 2.1. *Expresia din paranteza pătrată din (2.4) este chiar numărătorul lui* $f'(x)$ *din (2.1).*
Această observație constituie o cheie de control a corectitudinii calculelor și desigur ușurează mult studiul rădăcinilor și semnului derivatelor $f'(x)$ și $f''(x)$, căci încă de la calculul derivatei $f'(x)$ noi avem deja unele informații despre derivata $f''(x)$.

De exemplu dacă derivata $f'(x)$ n-are rădăcini reale, adică numărătorul lui $f'(x)$ are $\Delta<0$, atunci derivata a doua $f''(x)$ va avea o singură rădăcină reală (conform șirului lui Rolle).

§3. Legătura cu rezolvarea ecuației de gradul III

Să presupunem că funcția dată prin (1.1) o descompunem in fracții simple sub forma

$$f(x)=A+\frac{B}{x-\alpha}+\frac{C}{x-\beta}. \tag{3.1}$$

Această descompunere se practică de obicei când rădăcinile numitorului funcției **f**, α și ß sunt reale, dar descompunerea (3.1) este valabilă și dacă α și ß sunt numere complexe și atunci evident și coeficienții A,B,C pot fi numere complexe.

Să calculăm acum $f'(x)$ și $f''(x)$ dacă $f(x)$ este dat de (3.1). Se obține

$$f'(x)=-\frac{B}{(x-\alpha)^2}-\frac{C}{(x-\beta)^2}, \tag{3.2}$$

$$f''(x)=2\frac{B(x-\beta)^3+C(x-\alpha)^3}{(x-\alpha)^3(x-\beta)^3}. \tag{3.3}$$

Acum ecuația $f''(x)=0$ este echivalentă cu

$$B(x-\beta)^3+C(x-\alpha)^3=0, \tag{3.4}$$

sau

$$\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^3=-\frac{B}{C}.$$

De aici deducem

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta}=-\sqrt[3]{\frac{B}{C}}, \tag{3.5}$$

unde pentru radical se consideră radicalul de ordinul al treilea complex, adică având trei valori.

Rădăcinile ecuației $f''(x)=0$ vor fi date de formula

$$x=\frac{\alpha+\beta\sqrt[3]{B/C}}{1+\sqrt[3]{B/C}}, \tag{3.6}$$

unde pentru radical se consideră cele trei valori complexe.

§4. Rezolvarea ecuației generale de grad trei

Procedeul folosit în paragraful precedent pentru găsirea rădăcinilor lui $f''(x)$ se poate adapta la rezolvarea ecuației de gradul al treilea

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \tag{4.1}$$

cu coeficienți reali sau complecși.

Prin substituția

$$x=y-\frac{a}{3}, \tag{4.2}$$

ecuația (4.1) se poate aduce la forma

$$y^3+py+q=0. \tag{4.3}$$

Vom presupune că p și q sunt nenuli (dacă unul din ele este zero, atunci rezolvarea ecuației este imediată).

Scriind ecuația (4.3) sub forma

$$y^3+py+q=m(y-\alpha)^3+(1-m)(y-\beta)^3=0 \tag{4.4}$$

unde m,α,ß se determină prin identificare,se obține

$$m=\frac{-\beta}{\alpha-\beta},\ \alpha\beta=-\frac{p}{3},\ \alpha+\beta=-\frac{3q}{p}. \tag{4.5}$$

Numerele α și ß se obțin din ecuația

$$z^2+\frac{3q}{p}z-\frac{p}{3}=0, \tag{4.6}$$

și atunci ecuația dată (4.4) devine ca și (3.4) și obținem

$$\left(\frac{y-\alpha}{y-\beta}\right)^3=\frac{m-1}{m}=\frac{\alpha}{\beta},$$

iar de aici ca și la (3.4) se obține

$$\frac{y-\alpha}{y-\beta}=\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

În final găsim

$$y=\frac{\alpha-\beta\sqrt[3]{\alpha/\beta}}{1-\sqrt[3]{\alpha/\beta}}, \tag{4.7}$$

radicalul luând trei valori.

Observaţia 4.1. Cu formula (4.7) chiar rădăcinile reale ale ecuației (4.3) sau (4.1) se exprimă ca sume de numere complexe conjugate.